16/12/19

Ορισμός 1) Καλούμε n-διάστατος συσχετικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, το σύνολο των διατεταγμένων n-άδων $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ όπου $a_i \in \mathbb{K}$. Τα στοιχεία αυτού καλούνται σημεία

2) Έστω $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Ορίζουμε ως συσχετική ποικιλότητα του I (συμβ με $V_K(I)$)

$V_K(I) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n : f_i(a_i, \ldots, a_n) = 0, \ \forall f_i \in I\}$

Πχ $\cdot V_{\mathbb{R}}(\langle x^2, y^2 \rangle) = \{(0,0)\}$ $\quad I = \langle x^2, y^2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x,y]$

Πρέπει $x^2 = 0$

$y^2 = 0$

$\cdot V_{\mathbb{R}}(x^2+1) = \emptyset$

$\cdot V_{\mathbb{C}}(x^2+1) = \{\pm i\}$

$\cdot V_{\mathbb{R}}(x^2+y^2-1) = \{$σύνολο σημείων μοναδιαίου κύκλου$\}$

Πρόταση: Έστω $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ και $\{g_1, \ldots, g_k\}$, $\{f_1, \ldots, f_t\}$ βάσεις αυτού ($I = \langle g_1, \ldots, g_k \rangle = \langle f_1, \ldots, f_t \rangle$)

Τότε, $V_K(\langle g_1, \ldots, g_k \rangle) = V_K(\langle f_1, \ldots, f_t \rangle)$

Πχ $\langle 2x^2 + 3y^2 - 11, x^2 - y^2 - 3 \rangle = \langle x^2 - 4, y^2 - 1 \rangle \in \mathbb{R}[x,y]$

$V_{\mathbb{R}}(\langle x^2 - 4, y^2 - 1 \rangle) = \{(2,1), (-2,1), (2,-1), (-2,-1)\}$

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$

Ορίζουμε ως $V_K(S) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n ; f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \ \forall f \in S\}$

$V \subseteq \mathbb{K}^n$

Ορισμός: Ένα σύνολο καλείται <u>αλγεβρικό</u> υπεράνω ενός $\mathbb{K}$, αν υπάρχει σύνολο $S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, $V = V_{\mathbb{K}}(S)$

Πχ $V = \{5, 7, 9, k, \ldots, \mathbb{R}\}$
$S = \{x-5, x-7, x-9, x-k\}$

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι αλγεβρικό. Όπως και το $\mathbb{C}$.

Θεώρημα: Έστω $I, J \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Τότε:
1) $V_{\mathbb{K}}(I+J) = V_{\mathbb{K}}(I) \cap V_{\mathbb{K}}(J)$
2) $V_{\mathbb{K}}(I \cdot J) = V_{\mathbb{K}}(I) \cup V_{\mathbb{K}}(J)$

Απόδειξη: 1) ($\Rightarrow$) Έστω $x \in V_{\mathbb{K}}(I+J) \overset{\text{op}}{\iff} f(x) = 0, \ \forall f \in I+J$
Παρατηρώ ότι $I, J \subseteq I+J$ άρα $h(x) = g(x) = 0, \ \forall h \in I, g \in J$
($\Leftarrow$) Έστω $x \in V_{\mathbb{K}}(I) \cap V_{\mathbb{K}}(J)$. Έστω τυχαίο $g \in I+J$
$g = h_1 + h_2$, $h_1 \in I$, $h_2 \in J$
άρα $g(x) = (h_1+h_2)(x) = h_1(x) + h_2(x) = 0$ γιατί $x \in V(I)$, $h_1 \in I$
άρα $x \in V(I+J)$

"Αλγεβρική Γεωμετρία"

Άλγεβρα	$\longrightarrow$ Γεωμετρία	$\longrightarrow$ Άλγεβρα
Αλγ στοιχείο	Σημείο στον χώρο	$I(V_{\mathbb{K}}(I))$
$I = \langle f_1, f_s \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$	$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$	$\rightarrow$ ιδεώδες
(Το ιδεώδες)	$f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0$	
	$V_{\mathbb{K}}(I)$	

Ορισμός: Έστω $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ και $V_{\mathbb{K}}(I)$ η αντ. συσχετική ποικιλότητα. Ορίζουμε το σύνολο:
$I(V_{\mathbb{K}}(I)) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] : f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \ \forall (a_1, \ldots, a_n) \in V_{\mathbb{K}}(I)\}$

→ Τι διαφορά έχει το I με το $I(V_{\mathbb{K}}(I))$;

Πχ $I = \langle x^2, y^2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x,y]$ Γενικά $I \subseteq I(V_{\mathbb{K}}(I))$

$V_{\mathbb{R}}(I) = \{(0,0)\}$ (Εδώ παρατ. ότι $V_{\mathbb{K}}(I) = \{(0,0)\}$ κ ενώ $x \in I(V_{\mathbb{K}}(I))$ παρατ. ότι $x \notin I$)

Θεώρημα: Το $I(V(I))$ είναι ιδεώδες.

Θεώρημα: Έστω V, W συσχετικές ποικιλότητες.

1) $V(I) \subset W(I) \Rightarrow I(V(I)) \supset I(W(I))$

2) $V(I) = W(I) \Leftrightarrow I(V_{\mathbb{K}}(I)) = I(W_{\mathbb{K}}(I))$

Προβλήματα

1) Πρόβλημα NULLSTELLENSATZ
να προσδιοριστεί η σχέση I, $I(V(I))$

2) Πότε 2 ιδεώδη αντιστοιχούν στην ίδια συσχετική ποικιλότητα;
δεν ισχύει απαραίτητα ότι αν $V(I) = V(J) \not\Rightarrow I = J$

Πχ $I_1 = \langle 1 + x^2 \rangle \Rightarrow V(I_1) = \emptyset$

$I_2 = \langle 1 + x^2 + x^4 \rangle \Rightarrow V(I_2) = \emptyset$

$I_3 = \langle 2 \rangle \Rightarrow V(I_3) = \emptyset$.

3) Radical membership
Έστω $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$
(Θυμάμαι! $\sqrt{I} = \{ a \in \mathbb{R} : a^n \in I$, για κάποιο $n \in \mathbb{N} \}$)
$\varphi \in \mathbb{K}[x_1, x_n]$. Πότε $\varphi \in \sqrt{I}$; και να βρεθεί ο ελάχιστος $n : \varphi^n \in I$

4) Δοθέντος I, J, έλεγχος $\sqrt{I} = \sqrt{J}$

Θεώρημα (Weak Nullstellensatz): ($\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ αλγ κλειστό, κάθε πολυώνυμο έχει λύση)
Έστω $\mathbb{K}$ αλγεβρικά κλειστό σώμα (ή έστω $\overline{\mathbb{K}}$)
$\Rightarrow V_{\mathbb{K}}(I) = \emptyset \Leftrightarrow I = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ Έστω $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

$$I \subseteq S$$
$$I = S \Leftrightarrow 1 \in I$$

Έστω $(\Sigma)\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ \vdots \\ f_s = 0 \end{cases}$ Το (Σ) ΔΕΝ έχει λύση $\Leftrightarrow I = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

$\Leftrightarrow$ Το $1 \in I \Leftrightarrow 1 \xrightarrow[+]{G} 0$, G ανάγωγη β. Gröbner

Απόδειξη: $V_{\bar{K}}(I) = \emptyset \Leftrightarrow I = \mathbb{K}[x]$

Στον $\mathbb{K}[x]$ κάθε ιδεώδες κύριο, άρα $\exists f \in \mathbb{K}[x]$: $I = \langle f \rangle$, $f \neq 0$

$V_{\bar{K}}(I) = \emptyset \Leftrightarrow f$ σταθερά και $\mathbb{K}$ σώμα $\Rightarrow \exists\, 1/f \in \mathbb{K}$

$\left.\begin{matrix} \Leftrightarrow f \in I \\ 1/f \in \mathbb{K} \end{matrix}\right\} \overset{I\delta.}{\Longleftrightarrow} f \cdot \frac{1}{f} \in I \Leftrightarrow 1 \in I \Leftrightarrow I = \mathbb{K}[x]$.

Θεώρημα Hilbert's Nullstellensatz:

Ισχύει $I(V_{\bar{K}}(I)) = \sqrt{I}$

Πόρισμα: Έστω $\mathbb{K}$ αλγεβρικά κλειστό. Τότε, ισχύει:

$V_{\mathbb{K}}(I) = V_{\mathbb{K}}(J) \Leftrightarrow \sqrt{I} = \sqrt{J}$.

Πόρισμα: Έστω $\mathbb{K}$ αλγ κλειστό σώμα, $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

$\varphi \in \sqrt{I} \Leftrightarrow 1 \in \langle f_1, f_2, \dots, f_s, 1 - \omega f \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, \omega]$

ΠΧ $I = \langle xy^2 + 2y^2, x^4 - 2x^2 + 1 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x,y]$ $\quad$ deglex $y > x$

Να ελεγχθεί αν $f = y - x^2 + 1 \in \sqrt{I}$

Αν ναι, να βρεθεί ελάχιστος φυσικός $n \in \mathbb{N}$: $f^n \in I$

Θεωρώ $I' = \langle \underbrace{xy^2 + 2y^2}_{= f_1}, \underbrace{x^4 - 2x^2 + 1}_{= f_2}, \underbrace{1 - \omega(y - x^2 + 1)}_{= f_3} \rangle$

διάταξη απαλοιφής $\omega > y > x$ deglex

$G_{I'} = \{1\} \Leftrightarrow f \in \sqrt{I}$

Θέλουμε min $n \in \mathbb{N}$: $f^n \in I$. Βρίσκω βάση Gröbner του I

$G_I = \{\underbrace{y^2}_{= f_1}, \underbrace{x^4 - 2x^2 + 1}_{= f_2}\}$ ανάγωγη

- $f \xrightarrow[+]{G_I} f$ ως ανάγωγο

$f^2 \equiv N_G(f^2)$
$\quad\; \| $
$-2yx^2 + 2y$

• $f^2 = (y-(x^2-1))^2 = y^2 - 2y(x^2-1) + (x^2-1)^2$

$= y^2 - 2yx^2 + 2y + x^4 - 2x^2 + 1$

$= x^4 - 2yx^2 + y^2 - 2x^2 + 2y + 1 - \frac{x^4}{x^4}(x^4 - 2x^2 + 1)$

$\xrightarrow[+]{f_2} -2yx^2 + y^2 + 2y - \frac{y^2}{y^2}y^2 \xrightarrow[+]{f_1} -2yx^2 + 2y$

• $f^3 = f^2 \cdot f \equiv (-2yx^2 + 2y)(y - x^2 + 1)$

$= -2y^2x^2 + 2yx^4 - 2yx^2 + 2y^2 - 2yx^2 + 2y$

$= 2yx^4 - 2y^2x^2 - 4yx^2 + 2y^2 + 2y - \frac{2yx^4}{x^4}(x^4 - 2x^2 + 1)$

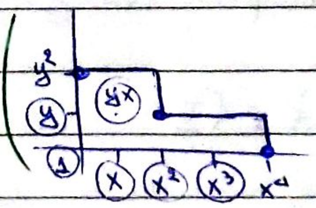
$\xrightarrow[+]{f_2} -2y^2x^2 + 2y^2 - \frac{-2y^2x^2}{y^2}y^2 \to 0.$

Άρα, $n=3$

Θεώρημα Έστω $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ και η $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ η ανάγωγη βάση Gröbner του I ως προς $<$ μονων. διάταξη.
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
1) $V_{\bar{\mathbb{K}}}(I) < +\infty$
2) $\forall\, i = 1, \dots, n,\ \exists\, j \in \{1, \dots, t\} : lm g_j = x_i^{\nu}$ για κάποιο $\nu \in \mathbb{N}$
3) $\dim \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I < +\infty$.

Πχ $I = \langle yx^2 - 4x,\ y^2 + x^2 - 5 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x,y]$ deglex, $y > x$

Η ανάγωγη βάση Gröbner
$G = \{yx^2 - 4x,\ y^2 + x^2 - 5,\ x^4 + 4xy - 5x^2\}$
$\Downarrow$



$\dim \mathbb{K}[x,y]/I = 6$
$\Downarrow$
$\deg I = 6$

$lm g_1 = yx^2,\ lm g_2 = y^2,\ lm g_3 = x^4 \Rightarrow \dim V_{\mathbb{C}}(I) < +\infty$

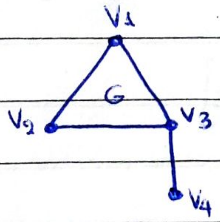
$\Rightarrow$ Το (Σ) $\begin{cases} yx^2 - 4x = 0 \\ y^2 + x^2 - 5 = 0 \end{cases}$ Το $1 \notin G$ άρα έχει λύση (δεν είναι αδύνατο)

Ορισμός: Έστω $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Το I καλείται μηδενοδιάστατο αν το (Σ) $\begin{cases} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_s = 0 \end{cases}$ έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων.

Σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε βαθμό του I

$$\deg(I) = \dim \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] / I$$

Γράφημα: $\underset{\text{graph}}{G} = (\underset{\text{vertices}}{V}(G), \underset{\text{edges}}{E}(G))$



$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

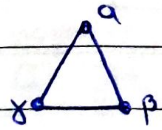
$E(G) = \{(v_1 v_2), (v_1, v_3), (v_2 v_3), (v_3, v_4)\}$

Μας ενδιαφέρει το πρόβλημα χρωματισμού ενός γραφήματος (κορυφών)

Δηλαδή, να βάψουμε τις κορυφές ενός γραφήματος, έτσι ώστε δύο διαδοχικές να μην έχουν ίδιο χρώμα (κορυφές που αποτελούν ακμή) (με ενδιαφέρει ο ελάχιστος αριθμός)

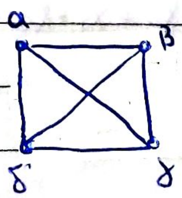
Ο αριθμός αυτός s καλείται χρωματικός αριθμός του G.

Πχ

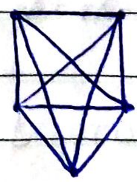


K_3

K_4



K_5



Πλήρες γράφημα (K_n) καλείται το γράφημα n κορυφών, για το οποίο όλες οι κορυφές συνδέονται με ακμή

Έστω $1, \xi, \xi^2 \dots$ οι πρωταρχικές ρίζες της μονάδας

Τα n-χρώματα αντιπροσωπεύονται από $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}$

Θεωρώ το ιδεώδες

$$I_G = \langle x_i^s - 1 \quad 1 \le i \le n \rangle + \langle x_i^{s-1} + x_i^{s-2} x_j + x_i^{s-3} x_j^2 + \dots + x_j^{s-1} \rangle$$

• η μεταβλητή x_i δηλώνει το χρώμα που έχει η κορυφή v_i
$\{v_i, v_j\} \in E(G)$

Θεώρημα. Οι v_i, v_j έχουν διαφορ. χρώμα $\Leftrightarrow x_i^{s-1} + x_i^{s-2} x_j + \dots + x_j^{s-1} = 0$

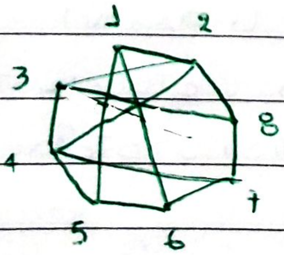
Άρα το πρόβλημα χρωματισμού με s χρώματα είναι η λύση του (Σ):

$$\begin{cases} x_i^s - 1 = 0 \\ x_i^{s-1} + x_i^{s-2} x_j + x_i^{s-3} x_j^2 + \dots + x_j^{s-1} = 0 \end{cases}$$

Το πρόβλημα χρωματισμού έχει λύση αν-ν $V_K(I) \neq \emptyset \Leftrightarrow 1 \notin G$
(ανάγωγη)

Πχ Έστω γράφημα G με $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$

$$E(G) = \begin{Bmatrix} (v_1,v_2), (v_1,v_5), (v_1,v_6), (v_4,v_7), (v_6,v_7) \\ (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_2,v_8), (v_5,v_6), (v_7,v_8) \\ (v_3,v_4), (v_3,v_8), (v_4,v_5), (v_5,v_7) \end{Bmatrix}$$



αν $S(G) = 3$,
Έχω το $I_G = \langle x_i^3 - 1$ (8 στοιχεία), $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2, \dots, x_2^2 + x_2 x_8 + x_8^2$ (14 στοιχεία) $\rangle$

... $G = \{x_1 - x_7, x_2 + x_7 + x_8, x_3 - x_7, x_4 - x_8, x_5 + x_7 + x_8, x_6 - x_8, \underbrace{x_7^2 + x_7 x_8 + x_8^2}, x_8^3 - 1\}$
ανάγωγη
αυτό είναι της μορφής $x_i^{s-1} + x_i^{s-2} x_j + \dots + x_j^{s-1} = 0$

Παρατηρώ ότι $1 \notin G \Rightarrow S(G) = 3$

$x_1 = x_7 = x_3$ (ίδιο χρώμα)
$x_4 = x_8 = x_6$ (ίδιο χρώμα)
$x_2 = x_5$ (ίδιο χρώμα)